УДК 512.541

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 1

П.А. Крылов*, Е.И. Подберезина

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Приведен обзор результатов исследования абелевых групп как артиновых или нётеровых модулей над кольцами эндоморфизмов. Описаны абелевы группы A и B такие, что группа гомоморфизмов Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы B. Описание групп A и B, для которых группа Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A, сведена к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы A и B, для которых группа Hom(A,B) есть нётеров модуль над кольцом E(A) или E(B). Исследование произвольной абелевой группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нётеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

В настоящее время быстро развивается теория абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Возрастающий интерес к этому разделу алгебры понятен: теория абелевых групп тесно переплетается с теориями модулей, колец, множеств, категорий, чисел и во многом является источником идей для смежных областей алгебры.

Каждой абелевой группе можно сопоставить ассоциативное кольцо с единицей $E(A)$ всех её эндоморфизмов. Это кольцо несёт определённую информацию о самой группе A. Основную задачу, относящуюся к кольцам эндоморфизмов, можно сформулировать так: найти по возможности точные соотношения между свойствами группы A и свойствами её кольца эндоморфизмов.

Истоки теории колец эндоморфизмов лежат в теории линейных преобразований векторных пространств. Важную роль в становлении теории колец эндоморфизмов сыграла книга Бэра [1]. В монографии Фукса [2, 3] рассматриваются кольца эндоморфизмов. В работе [4] освещены результаты о кольцах эндоморфизмов абелевых групп. Основы теории колец эндоморфизмов абелевых групп заложены Бэром, Капланским, Селе, Фуксом, Пирсом, Корнером, Ричменом, Уокером. В книге [5] подробно представлены все основные разделы теории колец эндоморфизмов абелевых групп.

Кольца эндоморфизмов абелевых групп широко изучаются с различных точек зрения. Их теория составляет самостоятельное направление, тесно связанное, конечно, с самой теорией абелевых групп. Этот раздел современной алгебры можно рассматривать с одной стороны, как часть теории абелевых групп, а с другой – как ветвь теории колец эндоморфизмов модулей. Он примыкает к обеим теориям, но имеет значительную специфику.

Изучение колец эндоморфизмов абелевых групп приносит дополнительные сведения о самих группах, вводит в исследование новый круг понятий и методов, помогает выделить неизвестные ранее классы групп и отыскать различные соотношения между ними. Изучение колец эндоморфизмов стимулирует исследования по теории модулей и их колец эндоморфизмов. Применение колец эндоморфизмов полезно и в других областях алгебры: аддитивные группы колец, E-модули и E-кольца.

Двумя важнейшими направлениями в теории колец эндоморфизмов являются рассмотрение групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов и изучение групп с кольцами эндоморфизмов специального вида (последнее направление называется также «кольцевые свойства колец эндоморфизмов»). С достижениями по этому кругу задач можно познакомиться также по обзору [4].

На каждой абелевой группе A получается структура левого модуля над кольцом эндоморфизмов $E(A)$ группы A, если положить $\alpha a=\alpha(a)$ для всех $\alpha\in E(A)$ и для всех $a\in A$. Многие задачи приводят к

необходимости рассмотрения группы A как модуля над кольцом $E(A)$. Начало систематическому изучению групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов было положено работами Ричмена и Уокера [6], Дугласа и Фарахата [7]. Группы как модули над кольцами эндоморфизмов предлагается исследовать в книге [2, проблема 12]. Внимание многих специалистов привлекают абелевы группы как модули над их кольцами эндоморфизмов. Изучались группы, являющиеся конечно порождёнными [8], инъективными [9], проективными [10], плоскими [11] модулями над своими кольцами эндоморфизмов.

Программа исследования колец эндоморфизмов со специальными свойствами была предложена Селе. Она привлекает большое внимание специалистов. Актуальность этого направления подчёркивает постановка проблемы 84 в книге [3]. Имеется в виду следующее. Для некоторого кольцевого свойства описать абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых обладают этим свойством. Исследовались группы с коммутативными [12], локальными [13], регулярными [14], самоинъективными [15], наследственными [16] кольцами эндоморфизмов.

Артиновы и нётеровы кольца и модули играют исключительно важную роль в теории колец и модулей (см. Ламбек [17], Каш [18. Гл. 6]). Артиновость или нётеровость модуля представляют по существу некоторые условия конечности.

Интересна следующая история возникновения понятий нётерова (артинова) кольца и модуля. Исторически одним из исходных пунктов развития теории некоммутативных колец и модулей над такими кольцами была теория алгебр над полем K. Как сами такие алгебры, так и их идеалы и модули над ними являются одновременно векторными пространствами над K. Следовательно, можно привлечь теорию векторных пространств, что и было сделано на первом этапе развития теории. Если используются условия конечности, то ясно, что нужно требовать конечной размерности лежащих в основе векторных пространств над K.

Последующее развитие было направлено на максимально возможное освобождение от предположения, что мы имеем дело с алгеброй. При рассмотрении колец, не являющихся алгебрами, в нашем распоряжении уже нет теории линейных пространств и потому, в частности, возникает вопрос о подходящей замене условий конечности для алгебр, которые более не применимы. Соответствующие понятия и точки зрения здесь разработала в первую очередь Эмми Нётер, заложив тем самым основы для дальнейшего развития. В качестве условий конечности она ввела условия минимальности и максимальности, которые могут быть сформулированы эквивалентным образом как условия для цепей подмодулей. И в других разделах математики они оказались столь же важными и естественными. Сразу подчеркнём, что в дальнейшем речь идёт о конечных или счётных цепях (рядах) подмодулей и в качестве отношения порядка рассматривается включение.

Абелевы группы как нётеровы модули над кольцами эндоморфизмов изучались Рейдом [8] и Парасом [19]. В § 111 книги [3] дано описание абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых являются телами, простыми или артиновыми кольцами. Там же характеризуются периодические группы с нётеровыми кольцами эндоморфизмов.

Группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A,B)$ стандартным способом превращается в левый модель над кольцом $E(B)$ и в правый модуль над кольцом $E(A)$. Хорошо известно, что существует естественный изоморфизм левых $E(B)$-модулей $\mathrm{Hom}(Z,B)\cong B$, где группа B также рассматривается как левый $E(B)$-модуль. Поскольку $\mathrm{Hom}(A,A)=E(A)$, то мы видим, что исследование группы $\mathrm{Hom}(A,B)$ как левого $E(B)$-модуля и правого $E(A)$-модуля действительно включает изучение групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов и изучение групп с кольцами эндоморфизмов специального вида.

Группа гомоморфизмов является важной и полезной конструкцией не только в теории абелевых групп, колец и модулей, но и в других областях математики. В монографии Фукса [2] найдено алгебраическое строение группы гомоморфизмов, установлены её гомологические свойства. Тому обстоятельству, что группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является $E(B)$-модулем и $E(A)$-модулем, в литературе уделялось мало внимания, хотя сам этот факт используется часто. Модульный подход к изучению группы гомоморфизмов с одной стороны, позволяет в качестве следствий единообразно выводить результаты о группах как модулях над кольцами эндоморфизмов и о кольцах эндоморфизмов со специальными свойствами. С другой стороны он даёт возможность получить дополнительную информацию об алгебраическом строении группы гомоморфизмов. Кроме того, введение новых классов групп расширяет знания об абелевых группах.

Все используемые далее обозначения стандартны. Буква p всегда обозначает простое число, N – множество всех натуральных чисел, Z – группа или кольцо целых чисел, Q – группа или поле рациональных чисел, $Z(p)$ – циклическая группа порядка p, $Z(p^\infty)$ – квазициклическая p-группа, J_p – группа целых p-адических чисел, F_p – аддитивная группа поля p-адических чисел. Для группы G обозначим через $E(G)$ её кольцо эндоморфизмов, $r(G)$ – ранг, а $r_p(G)$ – p-ранг группы G, то есть $r_p(G)=r(G/pG)$. Если A и B – группы, то группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ – группа гомоморфизмов из группы A в группу B. Для натурального числа n определим две вполне характеристические подгруппы группы G:

$$nG=\{ng|g\in G\} \text{ и } G[n]=\{g\in G|ng=0\}.$$

Все группы, о которых идёт речь, абелевы.

Приведём некоторые хорошо известные факты и понятия общего характера, которые в дальнейшем будем применять без пояснений.

Структура левого $E(B)$-модуля на группе $\mathrm{Hom}(A,B)$ задаётся с помощью формулы $(\alpha\varphi)a=\alpha(\varphi a)$ для всех $\varphi\in\mathrm{Hom}(A,B)$, $\alpha\in E(B)$, $a\in A$. Структура правого $E(A)$-модуля получается с помощью формулы $(\varphi\beta)a=\varphi(\beta a)$ для любого эндоморфизма $\beta\in E(A)$. В частности, всякую группу A можно естественным образом превратить в левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов $E(A)$, считая, что $\alpha a=\alpha(a)$ для любого $\alpha\in E(A)$ и $a\in A$.

Пусть A и B – группы. Положим

$$S_A(B)=\sum_{\alpha:A\to B}\alpha A,\quad K_B(A)=\bigcap_{\alpha:A\to B}\ker\alpha.$$

Используем краткие обозначения $S=S_A(B)$, $K=K_B(A)$, $\overline{A}=A/K$. Подгруппа S называется следом группы A в группе B (или A-цоколем). Она вполне характеристична в группе B. Подгруппа K называется B-радикалом группы A, она является вполне характеристической подгруппой группы A. Фактор-группу $\overline{A}$ можно назвать коследом группы B в группе A. Имеют место очевидные равенства $S=S_A(S)$, а также $K_B(\overline{A})=0$. Ясно, что $\mathrm{Hom}(A,B)=\mathrm{Hom}(A,S)$. Группу $\mathrm{Hom}(A,B)$ можно также естественным образом отождествить с группой $\mathrm{Hom}(\overline{A},S)$. А именно, обозначив через i вложение $K\to A$, а через π канонический гомоморфизм $A\to A/K$, получим индуцированную последовательность

$$0\to\mathrm{Hom}(A/K,B)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Hom}(A,B)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Hom}(K,B),$$

где i^*, π^* – индуцированные гомоморфизмы. По определению подгруппы K должно быть $i^*=0$. Следовательно, отображение π^* является изоморфизмом. С помощью этого изоморфизма и получается отождествление. Отметим ещё, что в силу вполне характеристичности подгруппы K в группе A фактор-группа A/K есть левый $E(A)$-модуль, а $\mathrm{Hom}(A/K,B)$ – правый $E(A)$-модуль. Изоморфизм π^* является изоморфизмом правых $E(A)$-модулей.

Часто применяются известные утверждения об индуцированных последовательностях. Если последовательность групп $0\to F\to G\to H\to 0$ точна, а M – левый модуль над кольцом R, то имеем точную последовательность левых и правых R-модулей соответственно:

$$0\to\mathrm{Hom}(H,M)\to\mathrm{Hom}(G,M)\to\mathrm{Hom}(F,M),$$
$$0\to\mathrm{Hom}(M,F)\to\mathrm{Hom}(M,G)\to\mathrm{Hom}(M,H).$$

Если же последовательность $0\to K\to M\to L\to 0$ является точной последовательностью левых R-модулей, G – некоторая группа, то получаем точную последовательность правых и левых R-модулей соответственно

$$0\to\mathrm{Hom}(L,G)\to\mathrm{Hom}(M,G)\to\mathrm{Hom}(K,G),$$
$$0\to\mathrm{Hom}(G,K)\to\mathrm{Hom}(G,M)\to\mathrm{Hom}(G,L).$$

Укажем важные подмодули модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$, которые можно получить, исходя из определённых подгрупп групп A и B. Приведём также некоторые канонические модульные разложения группы $\mathrm{Hom}(A,B)$, индуцируемые разложениями группы A или B. Если W – некоторая подгруппа (вполне характеристическая подгруппа) группы B, то $\mathrm{Hom}(A,W)$ – подмодуль $E(A)$-модуля ($E(B)$-модуля) $\mathrm{Hom}(A,B)$. Отсюда если

$$B=\prod_{i\in I}W_i,$$

где W_i – некоторые подгруппы (вполне характеристические подгруппы и множество I конечно), то имеет место естественный изоморфизм $E(A)$-модулей ($E(B)$-модулей):

$$\mathrm{Hom}(A,B)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(A,W_i).$$

Переходя к группе A, можно получить следующие подмодули и разложения. Если V – некоторая подгруппа (вполне характеристическая подгруппа) группы A, то множество $\{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,B)|\varphi V=0\}$ будет подмодулем $E(B)$-модуля (соответственно $E(A)$-модуля) $\mathrm{Hom}(A,B)$. Его можно отождествить с $\mathrm{Hom}(A/V,B)$. В частности, в случае $A=V_1\oplus V_2$ группу $\mathrm{Hom}(V_1,B)$ считаем равной следующей подгруппе группы $\mathrm{Hom}(A,B)$: $\{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,B)|\varphi V_2=0\}$. Разложение

$$A=\sum_{i\in I}{}^{\oplus}V_i,$$

где V_i – некоторые подгруппы (вполне характеристические подгруппы) группы A даёт естественный изоморфизм $E(B)$-модулей ($E(A)$-модулей):

$$\mathrm{Hom}(A,B)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(V_i,B).$$

Доказательства многих результатов опираются также на следующее замечание о притягивающих модулях [20. С. 523]. Пусть $\rho:R\to S$ – гомоморфизм колец, M – правый (левый) S-модуль. Посредством формул $mr=m\rho(r)$ (соответственно $rm=\rho(r)m$), где $m\in M$, $r\in R$, на группе M вводится структура правого (левого) R-модуля. Модуль M_R (${}_RM$) называется притягивающим для модуля M_S (${}_SM$). Его R-подмодули совпадают с S-подмодулями, если ρ сюръективен [18. С. 56], [20. С. 523].

Это замечание играет важную роль в следующих часто возникающих ситуациях. Пусть M – левый модуль над некоторым кольцом R, A и B – группы. Тогда $\mathrm{Hom}(A,M)$ ($\mathrm{Hom}(M,B)$) – левый (правый) R-модуль. Обычно модуль M будет появляться в связи с вполне характеристическими подгруппами групп A и B. Пусть, например, V – вполне характеристическая подгруппа группы A. Тогда имеем $E(A)$-модули V и A/V. Особенно важен случай, когда V – вполне характеристическое прямое слагаемое группы A. Для наших целей полезно то, что для такой подгруппы V подмодули $E(A)$-модуля V и $E(V)$-модуля V совпадают. Действительно, канонический гомоморфизм колец $E(A)\to E(V)$ является сюръективным и рассматриваемая ситуация укладывается в рамки понятия притягивающего модуля. Фактор-группа A/V также является $E(A)$-модулем и $E(A/V)$-модулем и подмодули этих модулей суть одно и то же. Опять канонический гомоморфизм колец $E(A)\to E(A/V)$ сюръективен. Можно далее заключить, что подмодули $E(A)$-модуля и $E(V)$-модуля $\mathrm{Hom}(V,B)$ совпадают и то же справедливо для подмодулей $E(A)$-модуля и $E(A/V)$-модуля $\mathrm{Hom}(A/V,B)$. Аналогичным образом, если W – вполне характеристическое прямое слагаемое

группы B, то совпадают подмодули $E(B)$-модуля и $E(W)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,W)$, а также подмодули $E(B)$-модуля и $E(B/W)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B/W)$.

Будем говорить, что простое число p относится к какой-то группе, если она имеет p-компоненту, (то есть p-компонента этой группы отлична от нуля).

p-компонентой группы G называется наибольшая p-группа, содержащаяся в G. Понятно, что p-компонента группы G совпадает с p-компонентой её периодической части.

Делимой (редуцированной) p-компонентой некоторой группы G будем называть делимую (редуцированную) часть её p-компоненты.

Группа называется ограниченной, если порядки всех её элементов ограничены в совокупности. Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп (теорема 17.2 из книги [2]).

Кольцо R называется нётеровым слева (артиновым слева), если модуль $_RR$ нётеров (артинов). Аналогично определяются нётеровы и артиновы справа кольца.

Модуль $_RM$ называется нётеровым (артиновым), если всякое непустое множество его подмодулей имеет максимальный (минимальный) по включению элемент.

Говорят, что возрастающая (убывающая) цепь подмодулей модуля M

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\subseteq\ldots(A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots\supseteq A_n\supseteq\ldots)$$

стабилизируется (или обрывается), если она содержит лишь конечное число различных модулей A_n.

Теорема 1. [18. Теорема 6.1.2]. Пусть M – левый (правый) R-модуль, A – его подмодуль. Следующие условия эквивалентны:

(1) M нётеров (артинов);

(2) A и M/A нётеровы (артиновы);

(3) каждая возрастающая (убывающая) цепь подмодулей модуля M стабилизируется.

Изложение полученных авторами результатов начнём с эндоартиновых и эндонётеровых групп.

Группа A, являющаяся нётеровым (артиновым) модулем над своим кольцом эндоморфизмов, называется эндоартиновой (эндонётеровой). Получено полное описание эндоартиновых групп, а изучение эндонётеровых групп сведено, что традиционно для теории абелевых групп, к изучению эндонётеровых групп без кручения [21. С. 172]:

Теорема 2. 1) Группа A эндоартинова тогда и только тогда, когда $A=B\oplus D$, где B – ограниченная группа, D – делимая группа с конечным числом ненулевых p-компонент.

2) Группа A эндонётерова тогда и только тогда, когда $A=B\oplus C$, где B – ограниченная группа, C – эндонётерова группа без кручения.

В доказательстве этой теоремы использована лемма 1.

Лемма 1. Пусть группа $A=\sum^{\oplus}_{i\in I}A_i$ и H – вполне характеристическая подгруппа в A. Тогда

$$H=\sum_{i\in I}{}^{\oplus}(H\cap A_i),$$

где каждая подгруппа $H\cap A_i$ вполне характеристична в A_i. Если некоторые слагаемые A_i и A_j изоморфны, то всякий изоморфизм между ними индуцирует изоморфизм между $H\cap A_i$ и $H\cap A_j$.

Теорема 2 играет важнейшую роль в доказательстве артиновости (нётеровости) многих подмодулей модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ (теоремы 3, 5, предложения 5, 10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. – М.: Иностранная литература, 1955. – 400 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
4. Марков В.Т., Михалёв А.В., Скорняков Л.А., Туганбаев А.А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. В кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1983. – Т. 21. – С. 183–254.
5. Крылов П.А., Михалёв А.В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – 451 с.
6. Richman F., Walker E. Primary abelian groups as modules over their endomorphism rings // Math. Z. – 1965. – V. 89. – № 3. – P. 77–81.
7. Douglas A.J., Farahat H.K. The homological dimension of an abelian group as a module over its ring of endomorphism // Monatsh. Math. – 1965. – V. 69. – № 2. – P. 294–305.
8. Reid J.D. Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings // Lecture Notes Math. – 1981. – V. 874. – № 5. – P. 41–52.
9. Richman F., Walker E. Modules over PIDs that are injective over their endomorphism rings // Ring theory. – N.Y.: Academic Press, 1972. – P. 363–372.
10. Arnold D., Pierce R.S., Reid J.D., Vinsonhaler C., Wickless W. Torsion-free abelian groups of finite rank projective as modules over their endomorphism rings // J. Algebra. – 1981. – V. 71. – № 1. – P. 1–10.
11. Faticoni Th. G., Goeters P. Examples of torsion-free groups flat as modules over their endomorphism rings // Commun. Algebra. – 1991. – V. 19. – № 1. – P. 1–27.
12. Szele T., Szendrei J. On abelian groups with commutative endomorphism rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1951. – V. 2. – № 9. – P. 309–324.
13. Orsatti A. Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi e locale // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1965. – V. 35. – № 7. – P. 107–115.
14. Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Commun. Algebra. – 1994. – V. 22. – № 4. – P. 1161–1176.
15. Иванов А.В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием // Абелевы группы и модули / Под ред. Л.А. Скорнякова. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. – С. 93–109.
16. Albrecht U. Baer's lemma and Fuchs' problem 84 a // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 203. – № 2. – P. 565–582.
17. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
18. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

19. Paras A.T. Abelian groups as Noetherian modules over their endomorphism rings // Contem. Math. – 1994. – V. 171. – № 9. – P. 325–332.
20. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
21. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа Hom(A,B) как артинов E(B)-модуль // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 170–184.

УДК 519.21